УДК 517.929

© **Е. С. Жуковский**

О НЕРАВЕНСТВАХ ВОЛЬТЕРРЫ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Введение

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений широко используются теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и их многочисленные обобщения. Исследованию и приложениям дифференциальных, интегральных и операторных неравенств посвящены работы Н. В. Азбелева, Н. С. Курпеля, А. А. Мартынюка, А. И. Перова, Б. Н. Садовского, С. Н. Слугина, З. Б. Цалюка, Б. А. Шувара, R. Bellman, E. Bickenbach, J. Chandra, V. Lakshmikantham, W. Mlak, B.G. Pachpatte, G. R. Shenge, T. Wazewski, J. Wilkins и других авторов. Развитие теории функционально-дифференциальных уравнений потребовало изучения операторных неравенств в различных функциональных пространствах. В предлагаемой работе рассмотрены вольтерровые операторные неравенства в произвольных банаховых пространствах.

§ 1. Вольтерровые операторы

Пусть B является банаховым пространством, на котором задана система $\mathfrak{V}$ отношений эквивалентности, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\upsilon(0) = B^2$;
2. $\gamma = 1$ соответствует отношение равенства;
3. если $\gamma > \eta$, то $\upsilon(\gamma) \subset \upsilon(\eta)$;
4. для всех $\gamma \in (0,1)$, $\lambda \in R$, $x, \widehat{x}, y, \widehat{y} \in B$ таких, что $(x, \widehat{x}) \in \upsilon(\gamma)$, $(y, \widehat{y}) \in \upsilon(\gamma)$, выполнено $(x+y, \widehat{x}+\widehat{y}) \in \upsilon(\gamma)$, $(\lambda x, \lambda \widehat{x}) \in \upsilon(\gamma)$.
5. для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любого $z \in B$ всякая сходящаяся последовательность элементов, $\upsilon(\gamma)$ — эквивалентных элементу z, имеет пределом элемент, также $\upsilon(\gamma)$ — эквивалентный z.

При каждом фиксированном $\gamma \in (0,1)$ обозначим $B/\upsilon(\gamma)$ — фактор-пространство, $\overline{x}_\gamma$ — класс элементов, $\upsilon(\gamma)$ — эквивалентных элементу $x \in B$, то есть $\overline{x}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$. Зададим в фактор-пространстве $B/\upsilon(\gamma)$ норму $\|\overline{x}_\gamma\|_{B/\upsilon(\gamma)} = \inf\limits_{x \in \overline{x}_\gamma} \|x\|_B$. Определим каноническую проекцию $\Pi_\gamma : B \to B/\upsilon(\gamma)$ равенством $\Pi_\gamma x = \overline{x}_\gamma$.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $K : B \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любых $x, y \in B$ из $(x, y) \in \upsilon(\gamma)$ следует $(Kx,\, Ky) \in \upsilon(\gamma)$.

Рассмотрим уравнение

$$x = Kx \tag{1}$$

с вольтерровым оператором $K : B \to B$. Обозначим $K_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ опрератор, заданный равенством $K_\gamma \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma Kx$, где $x \in \overline{x}_\gamma$.

О п р е д е л е н и е 2. Если существуют число $\gamma \in (0,1)$ и класс эквивалентности $\overline{z}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $\overline{z}_\gamma = K_\gamma \overline{z}_\gamma$, то уравнение (1) будем называть *локально разрешимым*, а класс $\overline{z}_\gamma$ — его $\upsilon(\gamma)$ *-локальным решением.* Элемент $z \in B$, удовлетворяющий уравнению (1), а также класс $\upsilon(1)$-эквивалентности $\overline{z}_1 = \{z\}$, назовем *глобальным*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00140).

решением. Если $0 < \xi < \gamma \leqslant 1$ и если $\overline{z}_\gamma$, $\overline{z}_\xi$ — соответственно $\upsilon(\gamma)$-локальное (или глобальное при $\gamma = 1$) и $\upsilon(\xi)$-локальное решения, удовлетворяющие включению $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$, то будем называть решение $\overline{z}_\gamma$ *продолжением решения* $\overline{z}_\xi$, а решение $\overline{z}_\xi$ *частью решения* $\overline{z}_\gamma$. Для произвольного локального или глобального решения $\overline{z}_\gamma$, при любом $\xi \in (0, \gamma)$, существует единственный класс $\overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, для которого имеет место $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$. Это позволяет отождествить каждое локальное или глобальное решение $\overline{z}_\gamma$ с отображением, ставящим в соответствие числу $\xi \in (0, \gamma]$ такой $\overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, что $\overline{z}_\gamma \subset \overline{z}_\xi$. *Предельно продолженным решением* будем называть отображение, сопоставляющее $\xi \in (0, \gamma)$ локальное решение $\overline{z}_\xi \in B/\upsilon(\xi)$, удовлетворяющее условиям: $\lim\limits_{\xi \to \gamma - 0} \|\overline{z}_\xi\|_{B/\upsilon(\xi)} = \infty$ и, если $0 < \eta < \xi < \gamma$, то $\overline{z}_\xi \subset \overline{z}_\eta$. Любое сужение такого отображения на $(0, \eta] \subset (0, \gamma)$ будем называть *частью предельно продолженного решения.*

§ 2. Неравенства Вольтеры

Будем предполагать, что пространство B полуупорядочено конусом B_+, и писать $x \rhd y$ или $y \lhd x$, если $x - y \in B_+$.

Определение 3. *Конус* $B_+ \subset B$ будем называть *вольтерровым на* $\mathfrak{V}$, если при любом $\gamma \in (0,\,1)$ множество $B_{+\gamma} = \Pi_\gamma B_+$ будет конусом в пространстве $B/\upsilon(\gamma)$.

Определение 4. *Будем говорить, что вольтерровый конус* $B_+ \subset B$ обладает свойством *сильной вольтерровой миниэдральности* (*вольтерровой нормальности*) *на* $\mathfrak{V}$, если при любом $\gamma \in (0,\,1)$ конус $B_{+\gamma} \subset B_\gamma$ является сильно миниэдральным (нормальным).

Теорема 1. *Пусть конус* B_+ *в банаховом пространстве* B *является несплющенным, вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, *вольтеррово сильно миниэдральным и вольтеррово нормальным. Пусть оператор* $K : B \to B$ *является вольтерровым на* $\mathfrak{V}$, *монотонным, предельно монотонно компактным* [1, с. 307] *и улучшающим* [2, с. 134]. *Пусть, кроме того, для некоторого элемента* $u \in B$ *выполнено неравенство* $u \rhd Ku$. *Тогда существует локальное решение* $\overline{z}_\delta$ *уравнения* (1), *для которого имеет место оценка* $\overline{z}_\delta \lhd \Pi_\delta u$. *Далее, любое локальное решение* $\overline{z}_\gamma$ *уравнения* (1), *для которого имеет место оценка* $\overline{z}_\gamma \lhd \Pi_\gamma u$, *продолжаемо либо до глобального* z, *удовлетворяющего неравенству* $z \lhd u$, *либо до предельно продолженного решения* $\overline{z}_\eta$, *такого что при всех* $\delta < \eta$ *выполнено* $\overline{z}_\delta \lhd \Pi_\delta u$. *Наконец, существует либо нижнее глобальное решение* z *уравнения* (1), *либо нижнее предельно продолженное решение* $\overline{z}_\eta$.

Теорема 1 используется для доказательства разрешимости и получения оценок решений функционально-дифференциальных уравнений. Отметим, что в формулировке теоремы 1 не предполагается непрерывность оператора $K : B \to B$. Это позволило применить рассмотренное утверждение к изучению обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью и уравнения с авторегулируемым запаздыванием.

Список литературы

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа.// М.: Наука. 1975. 512 с.
2. Жуковский Е.С. О корректности уравнений Вольтерра и приближенном решении функционально-дифференциальных уравнений // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби. Труды международного семинара. Екатеринбург. 2006. Т.1. С. 129-137.

Жуковский Евгений Семенович
Тамбовский государственный ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: zukovskys@mail.ru